LINEARE ALGEBRA

Gleichungssysteme
Teil 1

(1) Rechnen mit Paaren und Tripeln

(2) Eine Gleichung mit 2 oder 3 Unbekannten

(3) Zwei Gleichungen mit 3 Unbekannten

Datei Nr. 61 011

Stand 21. September 2014

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Übersicht über die Texte zu Gleichungsystemen

Damit Sie den gewünschten Text finden, bedachten Sie bitte folgende Hinweise.

(1) Behandlung dieser Themen in vier ausführlichen Texten (mit vielen Trainingsaufgaben):

61011 Lineare Algebra Teil 1 (Dieser Text)

1 Gleichung mit 2 oder 3 Unbekannten, 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten.
Zuerst wird hier das Rechnen mit Paaren und Tripeln behandelt, ferner Linearkombinationen von Zeilen- oder Spaltenvektoren.
Außerdem wird gezeigt, wie man die hier besprochenen Gleichungen mit den CAS-Rechnern CASIO ClassPad und TI Nspire lösen lässt (ab Seite 29).

61012 Lineare Algebra Teil 2

2 oder 3 Gleichungen mit 2 Unbekannten.
Als Lösungsverfahren wird die Additionsmethode verwendet, aber auch zweireihige Determinanten und die Cramersche Regel.

61013 Lineare Algebra Teil 3

3 Gleichungen mit 3 Unbekannten.
Als Lösungsverfahren die Determinantenmethode und die Cramersche Regel verwendet. Es wird auch gezeigt, wie man CAS-Rechner einsetzen kann.
Außerdem: **4 Gleichungen mit 4 Unbekannten.**

61014 Lineare Algebra Teil 4

Gleichungen mit 4 Unbekannten (mit vierreihigen Determinanten).

(2) Der neue Text 61020 verzichtet ganz auf Determinanten und CAS-Rechner. Dort werden Gleichungssysteme durch Eliminationsverfahren gelöst.

61020 Lineare Algebra Teil 5

Trainingsheft für Schüler. Kompakt und doch sehr ausführlich.
Die wichtigsten Arten von Gleichungssystemen werden nur mit Elimination gelöst.
Wer zwischendurch andere Verfahren sehen will, kann auf die oben genannten Texte zugreifen.

(3) Aufgabensammlungen

61014 Textaufgaben (meist Mischungsaufgaben), die auf lineare Gleichungssysteme führen.

61051 Aufgabensammlung
Weitere Aufgaben mit ausführlichen Lösungen

(4) ***Die Lösung von Gleichungssystemen mit dem Gauß-Algorithmus*** (also mit Matrizen) wird in diesen Texten besprochen:

62011 3 oder 4 Gleichungen mit 3 oder 4 Unbekannten

62012 Gleichungssysteme mit Parametern

62041 Aufgabensammlung zum Gauß-Verfahren.

62112 Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme

Inhalt

Hinweise zum Inhalt dieses Textes

Zu Beginn wird daher als Grundlage das Rechnen mit Vektoren behandelt. Darunter verstehen wir Zahlenpaare oder Zahlentripel (in Zeilen- oder Spaltenform geschrieben). Dann kommt der für die Gleichungslehre und für die spätere Vektorgeometrie wichtige Begriff der Linearkombination. Dazu auch die Methode, wie man Lösungsvektoren in Linearkombinationen zerlegt.

Auf einer Wiederholungsseite wird in § 2 noch einmal aufgezeigt, was es heißt, eine lineare Gleichung mit einer Unbekannten zu lösen, und was „Lösung" überhaupt bedeutet.

Dann folgen die Methoden zum Berechnen der Lösungsvektoren der oben genannten Gleichungen. Weil viele Schulen inzwischen mit CAS-Rechnern arbeiten, gibt es im § 6 eine Einführung darüber, wie man solche Gleichungen mit CASIO ClassPad bzw. mit TI Nspire löst.

§ 1 Rechnen mit Paaren und Tripeln

Die Algebra ist die Lehre vom Rechnen, von den Rechengesetzen, vom Lösen von Gleichungen usw. Man lernt hier, dass man nicht auch mit Zahlenpaaren, Zahlentripeln usw. rechnen kann. Dann zeige ich, wie man damit Gleichungen mit zwei oder mehr Unbekannten lösen kann.

Die Grundlage des „neuen" Rechnens sind Zahlenpaare wie $\left(2\,|\,\frac{5}{2}\right)$; $\left(-2\,|\,\sqrt{3}\right)$ usw.

Die **Menge aller Zahlenpaare** bezeichnet man mit $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ oder schreibt dafür auch $\mathbb{R}^2$.

Das heißt einfach: Beide Zahlen eines Paares sind reelle Zahlen.

Zahlentripel wie $\left(2\,|\,0\,|\,-4\right)$ gehören zur Menge $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^3$: usw.

<u>**Vorsicht:**</u> Man verwendet solche Paare und Tripel auch zur Beschreibung der Lage von Punkten in der Ebene bzw. im Raum. Daher man nennt die enthaltenen Zahlen auch Koordinaten.

Für uns sind Paare und Tripel jetzt nur ***algebraische Elemente***, mit denen wir rechnen werden.

(1) Addition von Paaren / Tripeln

Man definiert:
$$\boxed{\left(a_1\,|\,a_2\right)+\left(b_1\,|\,b_2\right):=\left(a_1+b_1\,|\,a_2+b_2\right)}$$
bzw.
$$\boxed{\left(a_1\,|\,a_2\,|\,a_3\right)+\left(b_1\,|\,b_2\,|\,b_3\right):=\left(a_1+b_1\,|\,a_2+b_2\,|\,a_3+b_3\right)}$$

Das Zeichen $:=$ liest man „sei". Es drückt aus, dass es sich um eine Definition handelt, die man also auch nicht beweisen kann.

<u>Beispiele</u>:

$$\left(5\,|\,2\right)+\left(1\,|\,7\right)=\left(6\,|\,9\right)$$
$$\left(9\,|\,-1\right)+\left(-3\,|\,-5\right)=\left(6\,|\,-6\right)$$
$$\left(2\,|\,4\right)+\left(0\,|\,0\right)=\left(2\,|\,4\right)$$

bzw. $\left(5\,|\,-7\,|\,2\right)+\left(0\,|\,7\,|\,9\right)=\left(5\,|\,0\,|\,11\right)$ usw.

Dies darf man auf mehrere Summanden ausdehnen:

$$\left(3\,|\,1\right)+\left(4\,|\,-2\right)+\left(-2\,|\,-5\right)=\left(5\,|\,-6\right)$$

(2) Vielfachenbildung (auch S-Multiplikation genannt)

Man definiert:
$$\boxed{r\cdot\left(a_1\,|\,a_2\right):=\left(ra_1\,|\,ra_2\right)}$$
bzw.
$$\boxed{r\cdot\left(a_1\,|\,a_2\,|\,a_3\right):=\left(ra_1\,|\,ra_2\,|\,ra_3\right)}$$

<u>Beispiele</u>:

$$4\cdot\left(-1\,|\,3\right)=\left(-4\,|\,12\right)$$
$$1\cdot\left(-3\,|\,5\right)=\left(-3\,|\,5\right)$$
$$0\cdot\left(-2\,|\,\tfrac{1}{2}\right)=\left(0\,|\,0\right)$$
$$\tfrac{2}{3}\cdot\left(12\,|\,-24\,|\,3\right)=\left(8\,|\,-16\,|\,2\right).$$
$$-5\cdot\left(3\,|\,2\,|\,-7\right)=\left(-15\,|\,-10\,|\,35\right)$$

usw.

(3) Will man Vielfache addieren, bildet man sogenannte Linearkombinationen:

Unter einer **Linearkombination** versteht man eine Summe von Vielfachen.

Beispiele $5 \cdot (6|5) + 3 \cdot (-2|8) = (30|25) + (-6|24) = (24|49)$

$2 \cdot (3\,|\,0\,|\,1) + 8 \cdot (2\,|\,5\,|\,-1) = (6\,|\,0\,|\,2) + (16\,|\,40\,|\,-8) = (22\,|\,40\,|\,-6)$

Zur Abkürzung bezeichnet man Paare und Tripel mit Buchstaben und einem Pfeil, und nennt sie **Vektoren**.

Vektor soll „nur" bedeuten, dass das Rechnen nach gewissen festgelegten Regeln folgt. Man nennt das dann Vektorrechnung.

$\vec{a} = (2|1)$ und $\vec{b} = (-4|5)$ sind also zwei Vektoren aus der Menge R^2.

Aus ihnen bilde ich jetzt einige Linearkombinationen:

$\vec{a} + \vec{b} = (2|1) + (-4|5) = (-2|6)$

$3\vec{a} + 7\vec{b} = 3 \cdot (2|1) + 7(-4|5) = (6|3) + (-28|35) = (-22|38)$

$12\vec{a} + 2\vec{b} = 12 \cdot (2|1) + 2(-4|5) = (24|12) + (-8|10) = (16|22)$

$5\vec{a} + \vec{b} = 5(2|1) + (-4|5) = (10-4|5+5) = (6|10)$

$\vec{x} = (6\,|\,5\,|\,-2)$ und $\vec{y} = (-2\,|\,8\,|\,5)$ sind zwei Vektoren aus der Menge R^3.

Aus ihnen bilde ich jetzt diese Linearkombinationen:

$5\vec{x} + 3\vec{y} = 5 \cdot (6|5|-2) + 3 \cdot (-2|8|5) = (30|25|-10) + (-6|24|15) = (24|49|5)$

$2\vec{x} + (-3)\vec{y} = 2 \cdot (6\,|\,5\,|\,-2) + (-3) \cdot (-2\,|\,8\,|\,5) = (12\,|\,10\,|\,-4) + (6\,|\,-24\,|\,-15) = (18\,|\,-14\,|\,-19)$

(4) Es gibt auch **„negative" Vektoren**.

Darunter versteht man einfach das (-1)-fache eines Vektors:

Man definiert: $-\vec{a} = (-1) \cdot \vec{a} = (-a_1\,|\,-a_2)$ in R^2

bzw. $-\vec{a} = (-1) \cdot \vec{a} = (-a_1\,|\,-a_2\,|\,-a_3)$ in R^3

Beispiele: $\vec{a} = (-2\,|\,3) \Rightarrow -\vec{a} = (2\,|\,-3)$

$\vec{b} = (1\,|\,-\tfrac{2}{3}\,|\,5) \Rightarrow -\vec{b} = (-1\,|\,\tfrac{2}{3}\,|\,-5)$

Mit diesen negativen Vektoren führt man jetzt die Subtraktion ein:

(5) Definition der Subtraktion von Vektoren:

Jetzt sollte man sich daran erinnern, dass $4+(-2)$ dasselbe ist wie $4-2$.
Mit anderen Worten: Die Subtraktion ist die Addition einer negativen Zahl.
Daher führt man die Subtraktion zweier Vektoren als <u>Summe mit dem negativen Vektor</u> ein:

<u>Definition:</u> $\boxed{\vec{a}-\vec{b}:=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)}$

<u>Beispiele:</u> $(8\,|\,3)-(2\,|\,5)=(8\,|\,3)+(-2\,|\,-5)=(8-2\,|\,3-5)=(6\,|\,-2)$

Wie man sieht, läuft dies auf die koordinatenweise Subtraktion hinaus.
Man subtrahiert die erste Koordinaten, dann die zweiten. Merke:

Addition und Subtraktion von Vektoren werden also koordinatenweise durchgeführt.
Dabei habe ich jetzt einfach die einzelnen Zahlen eines Vektors seine Koordinaten genannt, wie man das ja auch bei Punktepaaren oder Punktetripeln macht.

<u>Beispiele:</u>

Subtraktion von Zahlenpaaren:

$$(3\,|\,2)-(4\,|\,-5)=(3-4\,|\,2-(-5))=(-1\,|\,7)$$

$$(-2\,|\,6)-(-1\,|\,7)=(-2+1\,|\,6-7)=(-1\,|\,-1)$$

$$(-3\,|\,-10)-(7\,|\,-11)=(-3-7\,|\,-10+11)=(-10\,|\,1)$$

$$(0\,|\,-4)-(2\,|\,-5)=(0-2\,|\,-4+5)=(-2\,|\,1)$$

Subtraktion von Tripeln:

$$(10\,|\,0\,|\,2)-(2\,|\,5\,|\,-3)=(10-2\,|\,0-5\,|\,2+3)=(8\,|\,-5\,|\,5)$$

$$(4\,|\,-3\,|\,-2)-(-5\,|\,5\,|\,2)=(9\,|\,-8\,|\,-4)$$

$$(1\,|\,-3\,|\,6)-(4\,|\,-3\,|\,-3)=(-3\,|\,0\,|\,9)$$

Man kann natürlich auch <u>Linearkombinationen</u> mit der Subtraktion bilden:

Gegeben sind: $\vec{a}=(4\,|\,-2)$ und $\vec{b}=(-3\,|\,4)$

Dann rechnen wir:

$$2\vec{a}-3\vec{b}=2\cdot(4\,|\,-2)-2\cdot(-3\,|\,4)=(8\,|\,-4)-(-6\,|\,8)=(14\,|\,-12)$$

$$-3\vec{a}-2\vec{b}=-3\cdot(4\,|\,-2)-2\cdot(-3\,|\,4)=(-12\,|\,6)+(6\,|\,-8)=(-6\,|\,-2)$$

Hier wurde der Faktor -2 mit $\vec{b}$ multipliziert, sodass am Ende addiert werden musste.

$$6\vec{a}-5\vec{b}=6\cdot(4\,|\,-2)-5\cdot(-3\,|\,4)=(24\,|\,-12)-(-15\,|\,20)=(39\,|\,8)$$

Hier wurde anders gerechnet: Es wurde zuerst $5\vec{b}$ berechnet und dann subtrahiert.

(6) Zerlegung eines Vektors in eine Linearkombination

Zuerst bilden wir eine Linearkombination:

$r\cdot(3|-1)+s\cdot(2|3)=(3r|-r)+(2s|3s)=(3r+2s|-r+3s)$

Und jetzt machen wir diese Rechnung wieder rückgängig:

$$(3r+2s|-r+3s)=(3r|-r)+(2s|3s)=r\cdot(3|-1)+s\cdot(2|3)$$

Wir haben jetzt einen Vektor in eine Linearkombination zerlegt.

Zuerst wurde ein Paar aus den r-Anteilen gebildet, dann eines aus den s-Anteilen.

Dies ist eine ganz wichtige Rechenmethode, die man beherrschen muss:

$$(3r+2s-5|2r+3s+2)=(3r|2r)+(2s|3s)+(-5|2)=r(3|2)+s(2|3)+(-5|2)$$

$$(2a+b-3c|4a+5b+2c)=(2a|4a)+(b|5b)+(-3c|2c)=a(2|4)+b(1|5)+c(-3|2)$$

Oder mit Tripeln:

$$(2+r|4-2r|-1+3r)=(2|4|-1)+(r|-2r|3r)=(2|4|-1)+r(1|-2|3)$$

Dieses Tripel entsteht also aus dem festen Tripel $(2|4|-1)$ plus dem r-fachen von $(1|-2|3)$.

$$(3r+5s|4r-2s|-r)=(3r|4r|-r)+(5s|-2s|0s)=r(3|4|-1)+s(5|-2|0)$$

Dieses Tripel ist also eine Linearkombination aus den „Basistripeln“ $(3|4|-1)$ und $(5|-2|0)$ erzeugt worden. Die 0 darf man nicht vergessen!

$$(4+3r-2s|2-r+s|3r+s)=(4|2|0)+(3r|-r|3r)+(-2s|s|s)=(4|2|0)+r(3|-1|3)+s(-2|1|1)$$

(7) Rechnen mit Spaltenvektoren

Wir haben Paare und Tripel bisher stets als Zeilen (Zeilenvektoren) geschrieben.
Für bestimmte Anwendungen schreibt man sie jedoch als Spalten (Spaltenvektoren).
Das sieht dann anders aus, man rechnet jedoch dabei analog wie mit Zeilenvektoren.

Zeilenvektoren: $\vec{a}=(3|-5);\vec{b}=(4|2) \Rightarrow 2\vec{a}-3\vec{b}=2\cdot(3|-5)-3\cdot(4|2)=(-6|-16)$

Spaltenvektoren: $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix};\ \vec{b}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} \Rightarrow 2\vec{a}-3\vec{b}=2\cdot\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-16\end{pmatrix}$

Zeilenvektoren: $\vec{x}=(1|5|-6);\vec{y}=(0|-2|3) \Rightarrow 5\vec{x}-\vec{y}=5\cdot(1|5|-6)-(0|-2|3)=(5|27|-33)$

Spaltenvektoren: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\5\\-6\end{pmatrix};\ \vec{y}=\begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix} \Rightarrow 5\vec{x}-\vec{y}=5\cdot\begin{pmatrix}1\\5\\-6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\27\\-33\end{pmatrix}$

Auch die Zerlegungen gehen analog:

$$\begin{pmatrix}4+3s\\1-s\\5s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3s\\-s\\5s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4r-2s\\-7r\\2r+s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4r\\-7r\\2r\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2s\\0s\\s\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}4\\-7\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

Trainingsaufgabe 1

a) Berechne:

$$\left(3\,|\,2\right)+\left(-2\,|\,5\right)-\left(3\,|\,-4\right)$$

$$\left(-2\,|\,-8\right)-\left(4\,|\,3\right)-\left(-1\,|\,-5\right)$$

$$-\left(4\,|\,-2\,|\,-4\right)+\left(-3\,|\,6\,|\,-5\right)-\left(8\,|\,2\,|\,-6\right)$$

$$\left(2\,|\,-3\,|\,-11\right)-\left(-2\,|\,5\,|\,-12\right)+\left(-4\,|\,8\,|\,-3\right)$$

b) Zerlege die folgenden Tripel in Linearkombinationen:

(1) $\left(2+3r\,|\,5r-1\,|\,r+4\right)$ (2) $\left(-3r+2s\,|\,r\,|\,2s-5r\right)$ (3) $\left(7-4r+2s\,|\,5s\,|\,2r\right)$

(4) $\begin{pmatrix} 2r+4s \\ r-s \\ 8s \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 4+2s \\ 5-3r \\ 2r+7s \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} -2r+5s \\ 2+6r \\ 4+r-5s \end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix} 2+5r-s \\ 4+4r+s \\ 5r-2s \end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix} 4 \\ -r \\ 3s \end{pmatrix}$

§ 2 Gleichungen mit 1 Unbekannten

Einführungsbeispiel: $\boxed{2x+5=11}$ | -5

Zuerst das übliche Lösungsverfahren:

$2x = 11-5$

$2x = 6$ | :2

$x = 3$

Lösungsmenge: $L = \{3\}$

Diese Gleichung kann man als Aufgabe so formulieren:

Welche Zahl muss man für x in den Term 2x+5 einsetzen, damit man den Wert 11 erhält?

Abgesehen von Lösungsverfahren zur Berechnung der Lösungszahl, kann man auch durch Probieren versuchen herauszufinden, ob eine Zahl die gesuchte Lösung ist. Dazu setzt man sie in die Gleichung ein und überprüft, ob dadurch eine wahre Aussage entsteht. Man nennt dies „die Probe machen“. Wenn ja, haben wir eine Lösungszahl verwendet. Entsteht eine falsche Aussage, dann eben nicht.

Zu jeder Gleichung gehört eine Grundmenge, die angibt, welche Zahlen eingesetzt werden dürfen. In der Regel ist es (auf Oberstufenniveau) die Menge **R** der reellen Zahlen.

Einige Einsetzungen seien gezeigt:

$x = 3$ ergibt $2\cdot 3+5=11$ also die wahre Aussage 11 = 11.

$x = 1$ ergibt $2\cdot 1+5=11$ also die falsche Aussage 7 = 11.

Da 3 die einzige Lösungszahl dieser Gleichung ist, schreibt man sie in die Lösungsmenge: $L = \{3\}$

Information

Bei Gleichungen mit einer Unbekannten gibt es entweder eine eindeutige Lösung oder keine Lösung, oder jede Zahl ist Lösung. Beispiele dazu sind:

a) $\boxed{2x+5=11}$ hat eine eindeutige Lösung: $L = \{3\}$

b) $\boxed{2x+3=2x-3}$ hat keine Lösung:

Subtrahiert man beidseitig 2x, folgt $3=-3$, also eine falsche Aussage: $L = \{\ \}$

c) $\boxed{2(3x-1)=6x-2}$ hat jede Zahl als Lösung:

Durch Multiplizieren entsteht:

$6x-2=6x-2$

Diese Gleichung wird für jede Zahl zu einer wahren Aussage: $L = R$

Merke: Eine Lösungszahl einer Gleichung erzeugt durch Einsetzen eine wahre Aussage.

§ 3 1 Gleichung mit 2 Unbekannten

Einführungsbeispiel (1): $\boxed{3x + 2y = 10}$

Diese Gleichung kann man als Aufgabe so formulieren: Für welche Zahlen ist die Summe aus dem Dreifachen der ersten und dem Zweifachen der zweiten Zahl genau 10?

Es ist sofort klar, dass eine Lösung aus zwei Zahlen bestehen muss, eine für x und die andere für y. Diese Zahlen darf man auch nicht vertauschen. Diese beiden Zahlen bilden somit ein geordnetes Zahlenpaar. Wir setzen einige beliebige Zahlenpaare ein und wollen so herausfinden, ob sie zur Lösungsmenge gehören:

$(2 \mid 2)$	ergibt	$6 + 4 = 10$	wahre Aussage.
$(3 \mid 4)$	ergibt	$9 + 8 = 10:$	falsche Aussage
$(0 \mid 5)$	ergibt	$0 + 10 = 10$	wahre Aussage.
$(-6 \mid 14)$	ergibt	$-18 + 28 = 10$	wahre Aussage.

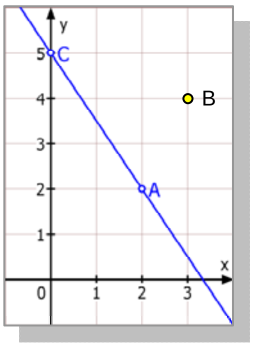
Man kann hier unendlich viele Lösungspaare finden. Sie alle gehören in die Lösungsmenge:

$$L = \{(2 \mid 2); (-6 \mid 14); (0 \mid 5).; \ldots\}$$

Zu jeder Gleichung gehört eine Grundmenge, die uns sagt, aus welcher Menge die einzusetzenden Zahlen genommen werden dürfen. Da wir hier zum Einsetzen Zahlenpaare benötigen, ist die Grundmenge die **Menge aller reellen Zahlenpaare** $G = \mathbb{R}^2$.

Dies wird in der Regel vorausgesetzt und daher nicht extra angegeben.

Erinnerst du dich?



Eine Lösungsmenge einer Gleichung mit zwei Unbekannten lässt sich geometrisch darstellen.

Dazu löst man die Gleichung nach y auf: $y = -\frac{3}{2}x + 5$.

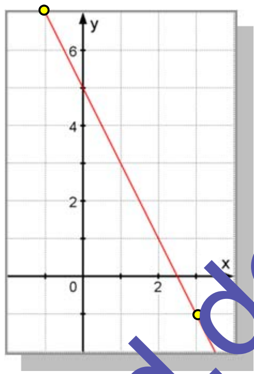
Diese Gleichung stellt eine Gerade dar.

MERKE:

Die Gerade ist die geometrische Darstellung der Lösungsmenge der Gleichung.

Zwei Lösungspaare davon haben wir oben ausgerechnet. Das dritte passt wegen seiner Koordinaten nicht mehr in das Schaubild. Das Paar $(3 \mid 4)$ wird durch den Punkt B dargestellt. B liegt nicht auf der Geraden, das Zahlenpaar gehört nicht zur Lösungsmenge der Gleichung.

Beispiel 2 $\boxed{2x + y = 5}$



Zuerst wollen wir nochmals Lösungspaare durch Einsetzen erkennen:

$(-2\,|\,5) \quad \Rightarrow \quad -4+5=5$ falsche Aussage.

$(3\,|\,-1) \quad \Rightarrow \quad 6-1=5$ wahre Aussage.

$(0\,|\,\tfrac{1}{2}) \quad \Rightarrow \quad 0+\tfrac{1}{2}=5$ falsche Aussage.

$(-1\,|\,7) \quad \Rightarrow \quad -2+7=5$ wahre Aussage.

Die Paare $(3\,|\,-1)$ und $(-3\,|\,11)$ gehören offenbar zur Lösungsmenge,

Dieses Probieren ist lästig. Um Lösungspaare zu finden geht man besser so vor:

Methode zur Berechnung von einzelnen Lösungspaaren

Gegeben ist die Gleichung: $2x + y = 5$

Umstellen nach y: $y = 5 - 2x$

z. B.: Wähle x = 4: folgt $y = 5 - 2\cdot 4 = 5 - 8 = -3$ $(4\,|\,-3) \in L$

Wähle x = 1: folgt $y = 5 - 2 = 3$, $(1\,|\,3) \in L$

Wähle x = -7 folgt $y = 5 + 14 = 19$, $(-7\,|\,19) \in L$

Bisher wissen wir also $L = \{(4\,|\,-3);(1\,|\,3);(-7\,|\,19);\ldots\}$

Methode zur mathematischen Erfassung der gesamten Lösungsmenge:

Gegeben ist die Gleichung: $2x + y = 5$

Umstellen nach y: $y = 5 - 2x$

Jetzt wählen wir keine bestimmte, sondern eine beliebige Zahl und nennen sie r:

$\boxed{\text{Wähle } x = r: \quad \text{folgt} \quad y = 5 - 2\cdot r, \qquad (r\,|\,5-2r) \in L}$

Man nennt $(r\,|\,5-2r)$ den allgemeinen Lösungsvektor.

Denkt man sich für r alle reellen Zahlen verwendet, erhält man die komplette Lösungsmenge:

$$L = \{(r\,|\,5-2r)\,|\,r \in \mathbb{R}\}$$

Man liest dies so: „Mengen aller Zahlenpaare $(r\,|\,5-2r)$ für beliebiges reelles r.“

ACHTUNG:

$L = \{(4\,|\,-3);(1\,|\,3);(-7\,|\,19);\ldots\}$ nennt man die ***aufzählende Form*** der Lösungsmenge. Hier wurden drei von unendlich vielen Lösungspaaren aufgezählt.

$L = \{(r\,|\,5-2r)\,|\,r \in \mathbb{R}\}$ ist die ***beschreibende Form*** der Lösungsmenge.
Sie gibt keine Lösungspaare an sondern nur eine Methode, wie man sie berechnen kann.

Nun muss man nur noch lernen, wie man die Lösung ins Heft schreiben sollte.
Ich schlage folgendes vor (und verwende dies auch in den weiteren Beispielen):

Empfohlene Darstellung der Lösung einer solchen Gleichung:

Gegeben:	$2x + y = 5$
Umstellen nach y:	$y = 5 - 2x$
Wähle	$x = r,\ r \in R$
Dann folgt:	$y = 5 - 2r$
Allgemeiner Lösungsvektor:	$(r \mid 5-2r)$
Lösungsmenge:	$L = \{(r \mid 5-2r) \mid r \in R\}$

<u>Wichtig:</u>

Den allgemeinen Lösungsvektor $(r \mid 5-2r)$ schreibt man oft so: $\vec{x} = (r \mid 5-2r)$.

Man kann ihn <u>in eine Linearkombination zerlegen</u> (wie in § 1 gelernt):

$$\vec{x} = (r \mid 5-2r) = (0 \mid 5) + r \cdot (1 \mid -2)$$

Die Lösungsmenge sieht dann so aus:

$$L = \{(0 \mid 5) + r(1 \mid -2) \mid r \in R\}$$

Daraus erkennt der Fachmann die <u>Struktur der Lösungsmenge</u>. Sie besteht aus allen Paaren, die aus einem Fixvektor $(0 \mid 5)$ plus einem beliebigen Vielfachen des Vektors $(1 \mid -2)$ entstehen.

Für die Vektorgeometrie hat das eine enorme Bedeutung.

Beispiel 3 $\boxed{x - 5y = 5}$

Hier ist es günstiger, die Gleichung nach x umzustellen um Brüche zu vermeiden:

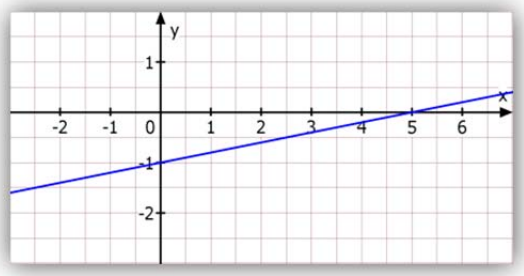
Umstellen nach x:	$x = 5 + 5y$
Wähle	$y = r,\ r \in R$
folgt:	$x = 5 + 5r$
Allgemeiner Lösungsvektor:	$(5 + 5r \mid r)$
Lösungsmenge:	$L = \{(5+5r \mid r) \mid r \in R\}$
Oder zerlegt:	$L = \{(5 \mid 0) + r(5 \mid 1) \mid r \in R\}$

<u>Grafische Darstellung:</u>

Um das Schaubild der Lösungsmenge zu zeichnen, muss man natürlich die Gleichung nach y umstellen: $5y = x - 5 \quad | :5$

$$y = \tfrac{1}{5}x - 1$$

Die Gerade hat die Steigung $m = \frac{1}{5}$ und den y-Achsenabschnitt n = -1.



Beispiel 4 $\boxed{4x+5y=20}$ mit $G=\mathbb{R}^2$.

Auflösen z. B. nach y: $5y=20-4x \quad\Rightarrow\quad y=4-\frac{4}{5}x$

Wähle $x=r\,;\,r\in\mathbb{R}$:

folgt: $y=4-\frac{4}{5}r$

Allgemeiner Lösungsvektor: $\left(r\,|\,4-\frac{4}{5}r\right)$

Lösungsmenge: $L=\left\{\left(r\,|\,4-\frac{4}{5}r\right)\,\middle|\,r\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\left(0\,|\,4\right)+r\left(1\,|\,-\frac{4}{5}\right)\,\middle|\,r\in\mathbb{R}\right\}$. (1)

Wichtige Vereinfachung des allgemeinen Lösungsvektors

Es gibt eine Möglichkeit, zumindest die **Brüche zu vermeiden**, die in dem zu r gehörenden Vektor stehen. Wenn man eine freie Wahl hat, kann man diese auch so nutzen, dass man für x statt r eine „Zahl" wählt, die bei y den Bruch wegfallen lässt. Dazu muss der Faktor 5 ins Spiel kommen. Wählt man $x=5r$, wird der Lösungsvektor bruchfrei, wie man sieht:

Wähle $x=\boxed{5r}\,;\,r\in\mathbb{R} \quad\Rightarrow\quad y=4-\frac{4}{5}\cdot\boxed{5r}=4-4r$

$L=\left\{\left(5r\,|\,4-4r\right)\,\middle|\,r\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\left(0\,|\,4\right)+r\left(5\,|\,-4\right)\,\middle|\,r\in\mathbb{R}\right\}$. (2)

Wohlgemerkt: Die Lösungsmenge ist in beiden Verfahren dieselbe.
Sie wird jetzt lediglich durch eine andere Bildungsvorschrift angegeben.

Das ist für Anfänger schwer verständlich. Also benötigt man ein Beispiel.

Das Paar $(15\,|\,-8)$ ist ein Lösungspaar, wie die Probe zeigt: $4\cdot\boxed{15}+5\cdot\boxed{-8}=60-40=20$.

In der Darstellung (1) lautet der allgemeine Lösungsvektor $\left(r\,|\,4-\frac{4}{5}r\right)$.

Das heißt doch, dass $x=r$ ist und $y=4-\frac{4}{5}r$.

Durch Vergleich mit $(15\,|\,-8)$ erkennt man: r = 15.

Den zugehörigen Punkt erhält man durch Einsetzen in $\left(r\,|\,4-\frac{4}{5}r\right)$:

Es folgt: $y=4-\frac{4}{5}\cdot 15=4-4\cdot 3=4-12=-8$.

Das passt! Also erhält man $(15\,|\,-8)$ durch r = 15.

In der Darstellung (2) lautet der allgemeine Lösungsvektor $\left(5r\,|\,4-4r\right)$.

Das heißt doch, dass $x=5r$ ist und $y=4-4r$.

Durch Vergleich mit $(15\,|\,-8)$ erkennt man: 15 = 5r, also muss r = 3 sein..

Setzen wir r = 3 in $y=4-4r$ ein, folgt: $y=4-4\cdot 3=4-12=-8$.

Das passt! Also erhält man $(15\,|\,-8)$ durch r = 3.

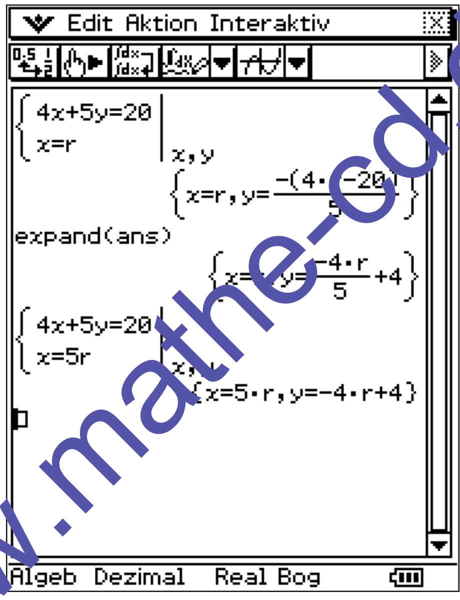
MERKE:

Durch eine geschickte Wahl für die frei wählbaren Unbekannten kann man oft die Lösungsvektoren bruchfrei machen.
Dadurch können die Lösungsvektoren bzw. Lösungsmengen eine unterschiedliche Bildungsvorschrift bekommen, sind aber dennoch identisch.

CAS-Lösung zu $\boxed{4x+5y=20}$

In § 6 wird ausführlich besprochen, wie man solche Gleichungen mit CAS-Rechnern löst.
Wer dies noch nicht kann, es aber jetzt schon versuchen will, der lese zuerst dort nach.
Hier zeige ich dennoch eine Lösung dazu für diejenigen, die im Unterricht damit arbeiten.

1. Screenshot von CASIO ClassPad:



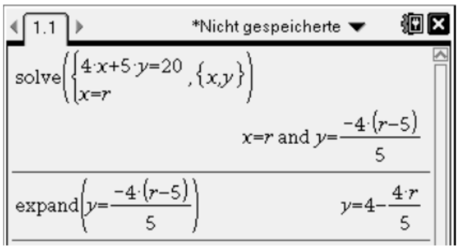
Zuerst wurde x = r als Lösung (d. h. als zweite Gleichung) vorgesehen.

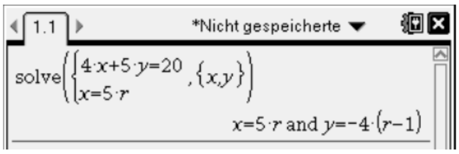
Das Ergebnis wurde als Bruch dargestellt und dann mit expand() zerlegt.

Im zweiten Versuch wurde x = 5r verwendet um den Bruch zu vermeiden, was auch geglückt ist.

Lösungsmenge also: $L=\{(5r \mid 4-4r) \mid r \in R\}$

2. Screenshot von TI Nspire:





Zuerst wurde x = r als Lösung (d. h. als zweite Gleichung) vorgesehen.

Das Ergebnis wurde als Bruch dargestellt und dann mit expand() zerlegt.

Im zweiten Versuch wurde x = 5r verwendet um den Bruch zu vermeiden, was auch geglückt ist.

Lösungsmenge also: $L=\{(5r \mid 4-4r) \mid r \in R\}$

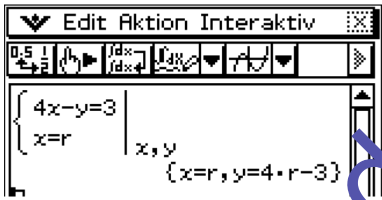
Ab jetzt werden immer Screenshots von CAS-Rechnern dazu abgebildet.

Beispiel 5

$\boxed{4x_1 - x_2 = 3}$ mit $G = \mathbb{R}^2$.

Umstellen nach x_2: $x_2 = 4x_1 - 3$

Wähle $x_1 = r;\quad r \in \mathbb{R}$



ergibt: $x_2 = 4r - 3$

Allgemeiner Lösungsvektor: $\vec{x} = (r \mid 4r - 3)$

Lösungsmenge: $L = \{(r \mid 4r-3) \mid r \in \mathbb{R}\}$

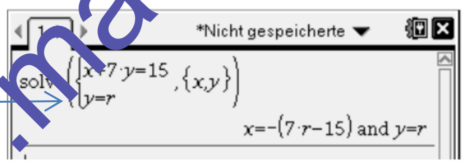
bzw. $L = \{(0 \mid -3) + r\cdot(1 \mid 4) \mid r \in \mathbb{R}\}$

Beispiel 6

$\boxed{x_1 + 7x_2 = 15}$ mit $G = \mathbb{R}^2$.

Umstellen nach x_1: $x_1 = 15 - 7x_2$

Wähle $x_2 = r;\quad r \in \mathbb{R}$



ergibt $x_1 = 15 - 7r$

Allgemeiner Lösungsvektor: $\vec{x} = (15 - 7r \mid r)$

Lösungsmenge: $L = \{(15-7r \mid r) \mid r \in \mathbb{R}\}$

bzw. $L = \{(15 \mid 0) + r\cdot(-7 \mid 1) \mid r \in \mathbb{R}\}$

Bemerkung:

Hier war es günstig, nach x_1 umzustellen um Brüche zu vermeiden.

Im Anschluss wurde x_2 frei gewählt.

Beispiel 7

$3x_1 + 2x_2 = 6$

Hier werden zwei Möglichkeiten zur Bestimmung der Lösungsmenge gezeigt.

(1) **Umstellen nach x_1:** $\boxed{x_1 = 2 - \frac{2}{3}x_2}$

Wählt man $x_2 = r;\quad r \in R$

erhält man durch Einsetzen: $x_1 = 2 - \frac{2}{3}r$

Der allgemeine Lösungsvektor enthält jetzt einen Bruch:

$$\vec{x} = (x \mid y) = \left(2 - \tfrac{2}{3}r \mid r\right)$$

Wählt man aber $x_2 = \boxed{3r};\quad r \in R$

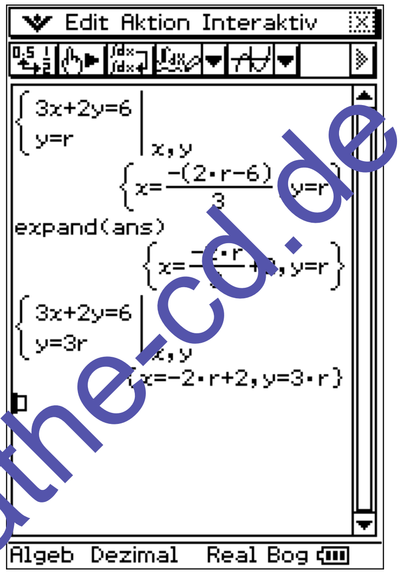
dann folgt: $x_1 = 2 - \frac{2}{3} \cdot \boxed{3r} = 2 - 2r$

und der Lösungsvektor wird bruchfrei:

$$\vec{x} = (2 - 2r \mid 3r)$$

Lösungsmenge: $L = \{(2 - 2r \mid 3r) \mid r \in R\}$

bzw. $L = \{(2 \mid 0) + r(-2 \mid 3) \mid r \in R\}$



---

(2) **Umstellen nach x_2** $\boxed{x_2 = 3 - \frac{3}{2}x_1}$

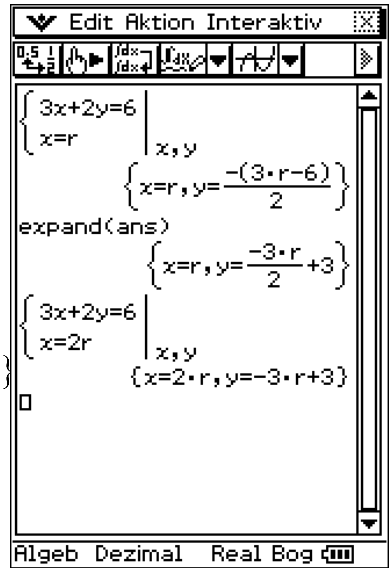
Wähle günstig: $x_1 = \boxed{2r};\quad r \in R$

ergibt bruchfrei: $x_2 = 3 - \frac{3}{2} \cdot \boxed{2r} = 3 - 3r$

Allgemeiner Lösungsvektor: $\vec{x} = (2r \mid 3 - 3r)$

Lösungsmenge: $L = \{(2r \mid 3 - 3r) \mid r \in R\}$

bzw. $L = \{(0 \mid 3) + r(2 \mid -3) \mid r \in R\}$

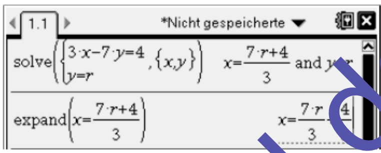


Beispiel 8

$3x - 7y = 4$

Bei dieser Gleichung kommt man **nicht** um Brüche herum!

(1) **Umstellen nach x**: $\boxed{x = \frac{4}{3} + \frac{7}{3}y}$.



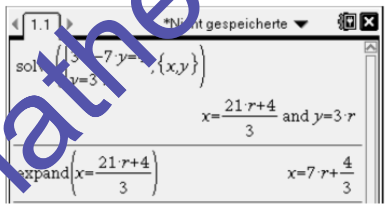
Wähle (1. Versuch) $y = r;\ r \in R$

folgt $x = \frac{4}{3} + \frac{7}{3}r$

Allgemeiner Lösungsvektor: $\vec{x} = \left(\frac{4}{3} + \frac{7}{3}r \mid r\right)$

Lösungsmenge: $L = \left\{\left(\frac{4}{3} + \frac{7}{3}r \mid r\right) \mid r \in R\right\}$

2. Versuch:



Man wählt günstiger $y = \boxed{3r};\ r \in R$

folgt $x = \frac{4}{3} + \frac{7}{3} \cdot \boxed{3r} = \frac{4}{3} + 7r$

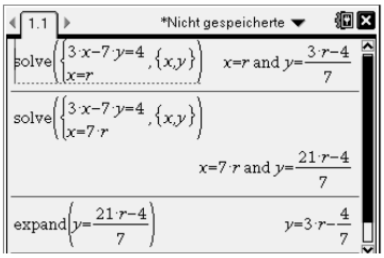
Allgemeiner Lösungsvektor: $\vec{x} = \left(\frac{4}{3} + 7r \mid 3r\right)$

Lösungsmenge: $L = \left\{\left(\frac{4}{3} + 7r \mid 3r\right) \mid r \in R\right\}$

Wie man sieht, hat man es zwar geschafft, den Summanden mit r bruchfrei zu machen, den absoluten Bruch-Summanden $\frac{4}{3}$ bekommt man nicht weg!

---

(2) **Umstellen nach y**: $y = \frac{3}{7}x - \frac{4}{7}$



Wähle günstig: $x = \boxed{7r};\ r \in R$

folgt $y = \frac{3}{7} \cdot \boxed{7r} - \frac{4}{7} = 3r - \frac{4}{7}$

Allgemeiner Lösungsvektor: $\vec{x} = \left(7r \mid 3r - \frac{4}{7}\right)$

Lösungsmenge: $L = \left\{\left(7r \mid 3r - \frac{4}{7}\right) \mid r \in R\right\}$

bzw. $L = \left\{\left(0 \mid -\frac{4}{7}\right) + r \cdot (7 \mid 3) \mid r \in R\right\}$

Trainingsaufgabe 2

Bestimme die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen.

Die Grundmenge sei stets $G = R^2$:

a) $4x + y = 8$ b) $x + 3y = 12$

c) $5x + 2y = 8$ d) $7x - 5y = 21$

e) $2x_1 + 5x_2 = 13$ f) $-8x_1 + 9x_2 = 1$

g) $3x_1 + 2x_2 = 0$ h) $4x_1 + 0x_2 = 5$